Nonlinear perturbations of dual semigroups(Evolution Equations and Applications to Nonlinear Problems)

橋本, 一夫

数理解析研究所講究録
第 730 巻 1990 年 138-165

Nonlinear perturbations of dual semigroups

橋本一夫（広島大・理）

1. 序論

この論文では次の形の半線形発展方程式

$$(DE) \qquad u'(t) = (A+B)u(t), \quad t > 0$$

の "mild solution" を与える非線形半群について考察する．A を Banach 空間 X 上の有界線形作用素 $\mathfrak{T} \equiv \{T(t)\}$ の (C_0)-半群の無限小生成作用素とする．このとき X 上の任意の有界線形作用素 B に対して $A+B$ は X 上の (C_0)-半群 $S(t)$ を生成し，いわゆる 'variation-of-constants formula'

$$(1.1) \qquad S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x\,ds, \qquad x \in X$$

が成り立つことは良く知られている．ここで積分は X における Bochner 積分の意味に取る．最近 [1] において X が (C_0)-半群 $\mathfrak{T}$ に関して $\odot$-回帰的である場合，A に加える摂動作用素 B を X から X を含む $\mathfrak{T}$ によって定まる空間 $X^{\odot *}$ への線形作用素としたときのことが調べられた．この場合，$\mathfrak{T}$ を一担空間 $X^{\odot *}$ に於ける半群 $\mathfrak{T}^{\odot *}$ に拡張し，Bochner 積分の代りに共役空間 $X^{\odot *}$ における Gel'fand 積分を用いることにより $X^{\odot *}$ に於いて variation-of-constants formula を定式化する．ところが積分項自身は再び $X^{\odot\odot} = X$ に戻り，X の位相で連続になることが示される．つまり新しく作られる半群 $S(t)$ は再び X 上の (C_0)-半群になっている訳である．

本論文の主な目的は，作用素 B が，X から $X^{\odot *}$ への連続な非線形作用素である場合に，$X^{\odot *}$ における半線形作用素 $A^{\odot *} + B$ によって生成される X 上の非線形半群について考察する事である．ここでは，X を含む空間 $X^{\odot *}$ を定め，A の非線形摂動として X の凸集合から $X^{\odot *}$ への連続な作用素 B を考え半線形作用素 $A^{\odot *} + B$ の一般的なクラスを導入し，これが X 上の非線形半群を生成する為の必要十分条件を与える．

本研究は Clément–橋本–大春–Pagter [2] の共同研究によるものである．

2. 共役半群と半線形発展方程式の一般化された解

$(X, |\cdot|)$ を（非回帰的）実 Banach 空間とする．X^* で X の共役空間を表す．$x \in X$, $f \in X^*$ に対して，f の x での値を $\langle x, f\rangle$ と表す．$\mathfrak{T} = \{T(t) : t \geq 0\}$ を無限小生成作用素 A を持つ X 上の有界線形作用素の強連続半群とする．$\mathfrak{T}^* = \{T^*(t) : t \geq 0\}$ を $T(t)$ の共役作用素 $T^*(t)$ の半群とし，A^* を A の共役作用素とする．

次の結果は良く知られている．証明については Hille-Phillips [3] を見よ．

定理 2.1. (i) 任意の $x^* \in X^*$ に対して，$T^*(\cdot)x^* : [0,\infty) \to (X^*, \sigma(X^*, X))$ は連続である．

(ii) A^* は $T^*(t)$ の汎弱生成作用素，即ち

$$x^* \in D(A^*) \Longleftrightarrow \text{汎弱位相で } \lim_{t\downarrow 0} \frac{T^*(t)x^* - x^*}{t} \text{ が存在.}$$

このとき $A^*x^* = (w^*) - \lim_{t\downarrow 0} \dfrac{T^*(t)x^* - x^*}{t}$ である．

(iii) $x^* \in D(A^*)$ ならば，$T^*(t)x^* \in D(A^*), t \geq 0$ で

$$A^*T^*(t)x^* = T^*(t)A^*x^*.$$

定理 2.1(iii) は $u^*(t) = T^*(t)x^*$ が微分方程式

$$\sigma(X^*, X)\text{-}\frac{d}{dt}u^*(t) = A^*u^*(t), \quad u^*(0) = x^* \in D(A^*),$$

の解であることを述べている．ここで左辺の導関数は汎弱位相の意味で考える．

X が回帰的でない限り，強位相を持つ X^* 上の半群 $T^*(t)$ は強連続であるとは限らない．定理 2.1(i) に依り $T^*(t)$ を汎弱連続半群と呼ぶ．

定義 2.2. $X^\odot \equiv \{x^* \in X^* : \lim_{t\downarrow 0} |T^*(t)x^* - x^*| = 0\}$

明らかに部分空間 $X^\odot$ は $T^*(t)$ で不変で，$X^\odot$ がノルム閉集合であることは容易に検証される．$T^\odot(t)$ を $T^*(t)$ の $X^\odot$ への制限とすると，$T^\odot(t)$ は $X^\odot$ 上の強連続半群となる．$A^\odot$ を半群 $\mathfrak{T}^\odot = \{T^\odot(t) : t \geq 0\}$ の生成作用素とする．同様にして $X^{\odot\odot}, T^{\odot\odot}(t)$ 等が定義される．とくに X が回帰的であるならば $X^* = X^\odot$ である．

定理 2.3 (Phillips). (i) $X^\odot = \overline{D(A^*)}$.

(ii) $A^\odot$ は A^* の $X^\odot$ に於ける部分，即ち，

$$D(A^\odot) = \{x^* \in D(A^*) : A^*x^* \in X^\odot\} \quad ; \quad A^\odot x^* = A^*x^*,\ x^* \in D(A^\odot).$$

(iii) $\overline{D(A^\odot)}^{\sigma(X^*,X)} = X^*$.

(iv) $\|x\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x^* \in X^\odot, |x^*| \leq 1\}$，$x \in X$ とおけば，$\|\cdot\|$ は X のもとのノルム $|\cdot|$ と同値なノルムになる．実際，$M = \liminf_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda, A)\|$ とおくと，

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|,\ x \in X$$

が成り立つ．

以下で，$X^\odot$，$X^{\odot *}$ のノルムはそれぞれ $\|\cdot\|_{X^\odot}$，$\|\cdot\|_{X^{\odot *}}$ と書くべき所であるが，簡単のため，混乱の恐れのない場合は同一の記号 $\|\cdot\|$ を用いる．

2

定理 2.3.(iv) より半群 $\mathfrak{T} = \{T(t) : t \geq 0\}$ が縮小半群ならば $|\cdot| = \|\cdot\|$ であることが分る．$A^{\odot *}$ は汎弱連続半群 $\mathfrak{T}^{\odot} = \{T^{\odot}(t) : t \geq 0\}$ の汎弱生成作用素である．X の元は X^* 上の連続線形汎関数，だから $X^{\odot}$ 上の連続線形汎関数と見做されるので，$X^{\odot *}$ の元と見做される．もしも，$\langle x_1 - x_2, x^{\odot}\rangle = 0$, $x^{\odot} \in X^{\odot}$ ならば $X^{\odot}$ が X^* で汎弱稠密だから必ず $x_1 = x_2$ となる．この自然な写像 $j_{\odot} : X \to X^{\odot *}$ を $\langle j_{\odot}(x), x^{\odot}\rangle$ で定義すれば，$\|j_{\odot}(x)\| = \|x\|$ となり X は $X^{\odot *}$ に位相同型的に埋め込まれる．$\mathfrak{T}$ が nonexpansive のときには等距離同型となる．更に双対を取ると

$$X^{\odot\odot} = \{x^{\odot *} \in X^{\odot *} : \lim_{t \downarrow 0} \|T^{\odot *}(t)x^{\odot *} - x^{\odot *}\| = 0\}$$

だから，明らかに $X \subset X^{\odot\odot}$.

定義 2.4. $X = X^{\odot\odot}$ となるとき X は $\mathfrak{T} = \{T(t) : t \geq 0\}$ に関して $\odot$-回帰的であるという．

定理 2.5 (Phillips). Banach 空間 X が (C_0)-半群 $\mathfrak{T}$ に関して $\odot$-回帰的となる為の必要十分条件は，その生成作用素 A の任意の（実はある）$\lambda \in \rho(A)$ に対して resolvent $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ が $\sigma(X, X^{\odot})$-コンパクトとなることである．

定理 2.6 (Phillips). Banach 空間 X が (C_0)-半群 $\mathfrak{T}$ に関して $\odot$-回帰的となる為の必要十分条件は $X^{\odot}$ が $\mathfrak{T}^{\odot}$ に関して $\odot$-回帰的となることである．

Pagter [10] は定理 2.5 より更に強い次の結果を与えた．

定理 2.7 (Pagter). Banach 空間 X が (C_0)-半群 $\mathfrak{T}$ に関して $\odot$-回帰的となる為の必要十分条件は 任意の（実はある）$\lambda \in \rho(A)$ に対して $R(\lambda, A)$ が 弱コンパクトとなることである．

補題 2.8. $v(\cdot)$ を $v(0) = 0$ なる $[0, \infty)$ 上で定義された $D(A^{\odot *})$-値 (強) 連続関数とする．このとき次は同値である：

1. 任意の $f \in X^{\odot}$ に対して，

$$(*) \qquad \langle v(\cdot), f\rangle \in C^1[0, \infty) \quad \text{かつ} \quad \frac{d}{dt}\langle v(t), f\rangle = \langle A^{\odot *}v(t), f\rangle$$

2. 任意の $f \in D(A^{\odot})$ に対して $(*)$ を満足する．

3. $v \equiv 0$.

[証明]　示すべきことは (2) $\Longrightarrow$ (3) だけである．任意の $f \in D(A^{\odot})$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{T^{\odot *}(h+s)v(t-s-h) - T^{\odot *}(s)v(t-s)}{h}, f \right\rangle \\
=\ & \left\langle \frac{T^{\odot *}(h+s)v(t-s-h) - T^{\odot *}(s)v(t-s-h)}{h}, f \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{T^{\odot *}(s)v(t-s-h) - T^{\odot *}(s)v(t-s)}{h}, f \right\rangle \\
=\ & \left\langle T^{\odot *}(s)v(t-s-h), \frac{T^{\odot}(h)f - f}{h} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{v(t-s-h) - v(t-s)}{h}, T^{\odot}(s)f \right\rangle \\
\xrightarrow{h\downarrow 0}\ & \langle T^{\odot *}(s)v(t-s), A^{\odot}f\rangle + \langle -A^{\odot *}v(t-s), T^{\odot}(s)f\rangle \\
=\ & \langle A^{\odot *}T^{\odot *}(s)v(t-s), f\rangle - \langle T^{\odot *}(s)A^{\odot *}v(t-s), f\rangle \\
=\ & \langle A^{\odot *}T^{\odot *}(s)v(t-s) - T^{\odot *}(s)A^{\odot *}v(t-s), f\rangle \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

従って任意の $f \in D(A^{\odot})$ に対して，

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle T^{\odot *}(s)v(t-s), f\rangle = 0 \quad \text{for} \quad 0 \le s \le t.$$

それ故に, $t \ge 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\langle v(t), f\rangle &= \langle T^{\odot *}(0)v(t) - T^{\odot *}(t)v(0), f\rangle \\
&= -\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\langle T^{\odot *}(s)v(t-s), f\rangle ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

従って, $\langle v(t), f\rangle = 0$, $\forall f \in D(A^{\odot})$ ． $\overline{D(A^{\odot})} = X^{\odot}$ より $v(t) \equiv 0$. ■

補題 2.9 (see [9], p.598, Lemma 2.3).　任意の $x \in X$ と任意の $f \in D(A^*)$ に対して，実数値関数 $\langle T(\cdot)x, f\rangle \in C^1[0,\infty)$ は次の性質を満たす：

$$\langle T(\cdot)x, f\rangle \in C^1[0,\infty) \quad \text{かつ} \quad \frac{d}{dt}\langle T(t)x, f\rangle = \langle T(t)x, A^* f\rangle.$$

次に，共役 Banach 空間に値をとる関数の Bochner 積分よりもはるかに弱いが以下の議論で重要になる積分概念を導入しておく．$(X, |\cdot|)$ を Banach 空間とする．いま閉区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $f : [a,b] \to X^*$ が任意の $x \in X$ に対して $\langle x, f\rangle \in L^1[a,b]$ となるとき f は Gel'fand 積分可能と呼ばれている．いま f をその様な関数とし $T_f(x) = \langle x, f\rangle$, $x \in X$

で定義される作用素 $T_f : X \to L^1[a,b]$ を考察する．このとき閉グラフ定理より容易に T_f が有界線形作用素であることが分る．従って任意の可測集合 E に対して，

$$\langle x, \nu(E)\rangle = \int_E \langle x, f(s)\rangle ds, \quad x \in X,$$

となる $\nu(E) \in X^*$ が存在する．明らかに，この様な元 $\nu(E)$ は一意に定まる．これを $\nu(E) = (G) - \int_E f(s)\,ds$ と表し，$\nu(E)$ を E 上の (f の) Gel'fand 積分という．特に $f : [0,\infty) \to X^*$ が汎弱連続な関数ならば，f は任意の有界部分区間 $[a,b] \subset [0,\infty)$ 上で Gel'fand 積分可能である．

次の定理は以下の議論で重要な役割を演じる．

定理 2.10 ([1]). 関数 $f : [0,\infty) \to X^{\odot *}$ が強連続であるとすれば，

$$t \mapsto (G) - \int_0^t T^{\odot *}(t-s)f(s)ds$$

は $X^{\odot\odot}$-値強連続関数である．

$(X, |\cdot|)$ を Banach 空間とし，A を X 上の (C_0)-半群 $\mathfrak{T} = \{T(t) : t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする．C を X の部分集合とし，B を C から $X^{\odot *}$ への非線形作用素とする．もし $D(A) \cap C \neq \emptyset$ ならば，和 $A+B$ は定義域 $D(A+B) = D(A) \cap C$ を持つ X から $X^{\odot *}$ への作用素と定義する．定義域 $D(A) \cap C$ は一般には空かもしれないが，たとえそれが空でも作用素の対 A, B によって決定される半線形作用素を表すのに記号 $A+B$ を用いる．

半線形発展方程式 (DE) に対する初期値問題を考察する：

$$u'(t) = (A+B)u(t), \quad t > 0; \qquad u(0) = x \in C. \tag{2.1}$$

問題 (2.1) は強解を持つとは限らない．それ故 (2.1) の一般化された解の概念を考察することが要求される．次は一般化された解の自然な概念である．

定義 2.11. $[0,\infty)$ 上の X-値強連続関数 $u(\cdot)$ が (2.1) の $\odot$-*mild solution* であるとは，$u(t) \in C, t \geq 0$ で，$Bu(\cdot)$ が $[0,\infty)$ 上の $X^{\odot *}$-値関数として強連続で，更に，

$$u(t) = T(t)x \ + \ (G) - \int_0^t T^{\odot *}(t-s)Bu(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

が成立することである．

定義 2.12. $[0,\infty)$ 上の X-値強連続関数 $u(\cdot)$ が (2.1) の $\odot$-*weak solution* であるとは，$u(0) = x$, $u(t) \in C$, $t \geq 0$; $Bu(\cdot)$ が $[0,\infty)$ 上で強連続; 任意の $f \in D(A^\odot)$ に対して，$\langle u(\cdot), f\rangle \in C^1[0,\infty)$; かつ

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), f\rangle = \langle u(t), A^\odot f\rangle + \langle Bu(t), f\rangle, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

が成立することである．

命題 2.13. $x \in C$ で $u(\cdot)$ を $u(0)=x$ となる $[0,\infty)$ 上の X-値強連続関数とする．このとき $u(\cdot)$ が (2.1) の $\odot$-mild solution である為の必要十分条件は (2.1) の $\odot$-weak solution となることである．

［証明］ $u(\cdot)$ を問題 (2.1) の $\odot$-mild solution とすると，任意の $f \in D(A^{\odot})$ に対して，

$$\langle u(t), f\rangle = \langle T(t)x, f\rangle \ + \int_0^t \langle T^{\odot *}(t-s)Bu(s), f\rangle ds, \quad t \geq 0.$$

$Bu(\cdot)$ が $[0,\infty)$ 上強連続であるから，補題2.9より，任意の $f \in D(A^{\odot})$ に対して，$\langle u(\cdot), f\rangle \in C^1[0,\infty)$ で，任意の $t \geq 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(2.4)\quad \frac{d}{dt}\langle u(t), f\rangle &= \frac{d}{dt}\langle u(t), f\rangle + \frac{d}{dt}\int_0^t \langle T^{\odot *}(t-s)Bu(s), f\rangle ds \\
&= \langle T(t)x, A^{\odot} f\rangle + \lim_{h\to 0+}\int_0^t \left\langle T^{\odot *}(t-s)Bu(s), \frac{T^{\odot}(h)f - f}{h}\right\rangle ds \\
&\qquad + \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle T^{\odot *}(t+h-s)Bu(s), f\rangle ds \\
&= \langle T(t)x, A^{\odot} f\rangle \ + \int_0^t \langle T^{\odot *}(t-s)Bu(s), A^{\odot} f\rangle ds \ + \ \langle Bu(s), f\rangle \\
&= \langle u(t), A^{\odot} f\rangle \ + \ \langle Bu(t), f\rangle.
\end{aligned}
$$

これは $u(\cdot)$ が (2.1) の $\odot$-weak solution であることを意味している．逆に $u(\cdot)$ が (2.1) の $\odot$-weak solution であるとする．

$$\bar{u}(t) = T(t)x \ + \ (G) - \int_0^t T^{\odot *}(t-s)Bu(s)ds, \quad t \geq 0$$

とおくと，定理 2.10 により $\bar{u}(\cdot)$ は $X^{\odot\odot}$-値強連続関数で，(2.4) の微分と同じ様にして，任意の $f \in D(A^{\odot})$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\langle \bar{u}(t), f\rangle = \langle \bar{u}(t), A^{\odot} f\rangle + \langle Bu(t), f\rangle, \quad t \geq 0.$$

従って，

$$\frac{d}{dt}\langle \bar{u}(t) - u(t), f\rangle = \langle \bar{u}(t) - u(t), A^{\odot} f\rangle, \quad t \geq 0,\ f \in D(A^{\odot}).$$

$z(t) = \bar{u}(t) - u(t),\ t \geq 0$ とおく．$z(0)=0$ で，$\langle z(t), f\rangle = \langle \int_0^t z(s)ds, A^{\odot} f\rangle,\ \forall t \geq 0,\ \forall f \in D(A^{\odot})$．ゆえに $v(t) = \int_0^t z(s)ds$ とおくと $v(t) \in D(A^{\odot *})$ でかつ $z(t) = A^{\odot *}\int_0^t z(s)ds = A^{\odot *}v(t)$． 任意の $f \in D(A^{\odot *})$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), f\rangle = \langle z(t), f\rangle = \langle A^{\odot *}v(t), f\rangle.$$

補題 2.8 より $v \equiv 0$ on $[0,\infty)$．従って，$\bar{u}(t) = u(t)$ on $[0,\infty)$．これは $u(\cdot)$ が (2.1) の $\odot$-mild solution であることを意味する． ■

3. (C_0)-半群の非線形摂動の無限小生成作用素

作用素 A を X 上の (C_0)-半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする．いま任意の $x \in C$ に対して初期値問題 (2.1) が $[0,\infty)$ 上の一意の $\odot$-mild solution を持つと仮定すると

$$S(t)x = u(t;x), \quad t \geq 0, \quad x \in C \tag{3.1}$$

によって，X 上の作用素 $\{S(t) : t \geq 0\}$ を定義出来る．作用素 $S(t)$ は C からそれ自身への作用素で必ず非線形である．また，これは次の 2 つの性質を持つ：

$(S1)$ 各 $x \in C$ に対して $S(0)x = x$, $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, s, $t \geq 0$.

$(S2)$ 各 $x \in C$ に対して，X-値関数 $S(\cdot)x$ は $[0,\infty)$ 上強連続である．

上の性質 (S1) と (S2) を満足する C からそれ自身への非線形作用素の一径数族 $\{S(t) : t \geq 0\}$ を **C 上の非線形半群**という．特に，C 上の半群が (3.1) の意味で (DE) の $\odot$-mild solution であるならば，その半群を**半線形発展方程式 (DE) に付随する C 上の非線形半群**と呼ぶ．

$\{S(t) : t \geq 0\}$ を (DE) に付随する C 上の非線形半群とする．このとき，

$$S(t)x = T(t)x \; + \; (G) - \int_0^t T^{\odot *}(t-s)BS(s)x\,ds, \quad t \geq 0, \quad x \in C. \tag{3.2}$$

定理 3.1. $\{S(t) : t \geq 0\}$ を任意の $x \in C$ に対して $BS(\cdot)x$ が $[0,\infty)$ 上で連続となる C 上の非線形半群とする．このとき次は同値である：

(i) $S(t)x = T(t)x \; + \; (G) - \int_0^t T^{\odot *}(t-s)BS(s)x\,ds\,, \quad t \geq 0\,, \quad x \in C.$

(ii) $\sigma(X^{\odot *}, X^{\odot})\text{-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(S(h)x - T(h)x) = Bx\,, \quad x \in C.$

(iii) $\lim_{h\downarrow 0} \langle h^{-1}(S(h)x - x), f\rangle = \langle x, A^{\odot} f\rangle + \langle Bx, f\rangle\,, \quad x \in C, \quad f \in D(A^{\odot}).$

(iv) $\dfrac{d}{dt}\langle S(t)x, f\rangle = \langle S(t)x, A^{\odot} f\rangle + \langle BS(t)x, f\rangle\,, \quad t \geq 0, \quad x \in C, \quad f \in D(A^{\odot}).$

(v) $\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A^{\odot *})$ and

$$S(t)x = x + A^{\odot *}\int_0^t S(s)x\,ds + \int_0^t BS(s)x\,ds, \quad t > 0, \quad x \in C.$$

［証明］ (i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らか．(ii) が成り立つと仮定する．$x \in C$, $f \in D(A^{\odot *})$ とする．$h > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\left\langle h^{-1}\left(S(h)x - x\right), f\right\rangle &= \left\langle h^{-1}\left(S(h)x - T(h)x\right), f\right\rangle + \left\langle h^{-1}\left(S(h)xT(h)x\right), f\right\rangle \\ &= \left\langle h^{-1}\left(S(h)x - T(h)x\right), f\right\rangle + \left\langle h^{-1}\int_0^h T(s)x\,ds, A^{\odot *}f\right\rangle.\end{aligned}$$

が成り立つ．(ii) を用いて，この式で $h \downarrow 0$ とすれば (iii) が得られる．次に (iii) を仮定すると，semigroup property を用いて，

$$\frac{d^+}{dt}\left\langle S(t)x, f\right\rangle = \left\langle S(t)x, A^{\odot}f\right\rangle + \left\langle BS(t)x, f\right\rangle, \quad t \geq 0, \quad x \in C, \quad f \in D(A^{\odot})$$

を得る．ここで左辺は $\langle S(\cdot)x, f\rangle$ の右微分を表す．また上の式の右辺は $t \geq 0$ で連続だから，$\langle S(\cdot)x, f\rangle \in C^1[0,\infty)$ で，左辺は通常の微分で置き換えられる．これにより (iv) が得られる．(iv) を仮定する．(iv) より $t \geq 0, x \in C$ 対して，

$$\left\langle \int_0^t S(s)x\,ds, A^{\odot}f\right\rangle = \left\langle S(t)x - x - \int_0^t BS(s)x\,ds, f\right\rangle, \quad f \in D(A^{\odot}).$$

が得られる．これより $\displaystyle\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A^{\odot *})$ かつ

$$A^{\odot *}\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - x - \int_0^t BS(s)x\,ds.$$

従って (v) が得られる．(v) $\Longrightarrow$ (iv) は明らか．(iv) $\Longleftrightarrow$ (i) は命題 2.13 より明らか． ■

4. (C_0)-半群の非線形摂動

X の双対性写像とは，各 $y \in X$ に対して，空でない汎弱コンパクト凸集合 $F(y) = \{f \in X^* : \langle y, f\rangle = |y|^2 = |f|^2\}$ を対応させる写像である．任意の $x, y \in X$ に対して，

$$\langle x, y\rangle_i = \inf\{\langle x, f\rangle : f \in F(y)\};$$

$$\langle x, y\rangle_s = \sup\{\langle x, f\rangle : f \in F(y)\}.$$

と定義する．同様にして $\odot$-共役空間 $X^{\odot}$ 及びその共役空間 $X^{\odot *}$ の双対性写像 $F^{\odot}$, $F^{\odot *}$ はそれぞれ

$$F^{\odot}(x^{\odot}) = \{f \in X^{\odot *} : \langle x^{\odot}, f\rangle = \|x^{\odot}\| = \|f\|\}, \quad x^{\odot} \in X^{\odot};$$
$$F^{\odot *}(x^{\odot *}) = \{f \in X^{\odot **} : \langle x^{\odot *}, f\rangle = \|x^{\odot *}\| = \|f\|\}, \quad x^{\odot *} \in X^{\odot *}.$$

この節では [9] に従って，半線形作用素の 1 つの一般的なクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(C,p)$ を導入する．

A を X 上の (C_0)-半群 $\mathfrak{T} = \{T(t) : t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする．B は X 上の凸部分集合 C から $X^{\odot *}$ への非線形作用素で，ある下半連続凸関数 $p : X \to [0,\infty]$, $p \not\equiv \infty$ に対して次の 3 条件を満たしているものとする：

(H1) $C \subset D(p) = \{x \in X : p(x) < \infty\}$ かつ任意の $\alpha > 0$ に対して，C のレベル集合 $C_\alpha = \{x \in C : p(x) \leq \alpha\}$ は閉集合で，B は C_α 上強連続．

(H2) 任意の $\alpha > 0$ に対して, 半線形作用素 $A^{\odot *} + B$ は $D(A^{\odot *}) \cap C_\alpha$ 上 $X^{\odot *}$ で準消散的．つまり，ある $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x, y \in D(A^{\odot *}) \cap C_\alpha$ に対して，

$$\langle (A^{\odot *} + B)x - (A^{\odot *} + B)y, x - y \rangle_i \leq \omega_\alpha \|x - y\|^2$$

が成り立つ．

このとき $A + B$ はクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(C, p)$ に属する半線形作用素であるという．また，定理 2.3(iv) より 明らかに (H2) は次の条件 (H′2) に同値である．

(H′2) 任意の $\alpha > 0$ に対して, 半線形作用素 $A^{\odot *} + B$ は $D(A^{\odot *}) \cap C_\alpha$ 上 $X^{\odot *}$ で準消散的．つまり，ある $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x, y \in D(A^{\odot *}) \cap C_\alpha$ に対して，

$$\langle (A^{\odot *} + B)x - (A^{\odot *} + B)y, x - y \rangle_i \leq \omega_\alpha |x - y|^2$$

が成り立つ．

上の条件 (H2) 及び (H′2) で ω_α は正数であると仮定してもよい事に注意．$A^{\odot *} + B$ についての条件 (H2) は局所条件なので, 局所的にしか $\odot$-mild solution の存在が言えない．従って (2.1) の大域的な $\odot$-mild solution を議論する為には $\odot$-mild solution の growth order を考察する必要がある．ここでは，実数値関数 $p(u(\cdot))$ によって$\odot$-mild solution $u(\cdot)$ の増大度を考える．

いま $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を連続関数とする．そして任意の $\alpha \geq 0$ に対して初期値問題

$$w'(t) = g(w(t)), \quad t > 0 \quad ; \quad w(0) = \alpha \tag{4.1}$$

が $[0, \infty)$ 上で最大解 $m(t; \alpha)$ を持つものとする．以下でその様な関数 g を固定して

$$p(u(t)) \leq m(t; p(x)), \quad t \geq 0 \tag{4.2}$$

を満足する (2.1) の大域的 $\odot$-mild solution を調べる．

まず (4.2) を満足する (2.1) の $\odot$-mild solution $u(\cdot)$ が C_α の各初期値によって一意に決定されかつ初期値に連続的に依存していることを示す．

一意性定理 (Martin, Oharu and Takahashi [8])．　$A + B \in \mathfrak{S}^{\odot *}(C, p)$ とする．$x \in C$ に対して (4.2) を満足する (2.1) の高々一つの $\odot$-mild solution が存在する．

命題 2.13 と上の結果を合せると次の結果を得る．

系．　$A + B \in \mathfrak{S}^{\odot *}(C, p)$ とする．任意に与えられた $x \in C$ に対して増大条件 (4.2) を満足する半線形問題 (2.1) は高々一つの $\odot$-mild solution を持つ．

5. (DE) に付随する非線形半群の生成

この節ではクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(C,p)$ に属する半線形作用素 $A+B$ が

$$(5.1)\qquad S(t)x = T(t)x \ + \ (G) - \int_0^t T^{\odot *}(t-s)BS(s)x\, ds, \quad \text{for } t \geq 0,\ x \in C,$$

$$(5.2)\qquad p(S(t)x) \leq m(t; p(x)) \quad \text{for } t \geq 0,\ x \in C.$$

を満足する C 上の非線形半群 $\{S(t) : t \geq 0\}$ を生成する為の十分条件について議論する．

(5.1) と (5.2) を満足する C 上の非線形半群 $\{S(t) : t \geq 0\}$ は次の意味で p-有界集合上で Lipschitz 連続である．

命題． $A+B \in \mathfrak{S}^{\odot *}(C,p)$．$\{S(t) : t \geq 0\}$ を (5.1), (5.2) を満足する C 上の非線形半群とする．このとき各 $\alpha > 0$ と $\tau > 0$ に対してある $\beta = \beta(\alpha, \tau)$ が存在し，

$$(5.3)\qquad \|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{\omega_\beta t}\|x-y\| \quad \text{for } t \in [0,\tau],\ x, y \in C_\alpha.$$

更に各 $x \in C$ に対して，$[0,\infty)$ 上の関数 $S(\cdot)x$ は (5.2) を満足する (2.1) の一意な $\odot$-mild solution を与える．

上の命題は前節で与えられた一意性定理の言換えである．

$A+B \in \mathfrak{S}^{\odot *}(C,p)$ に対して，次の 接触条件を導入する．

(R) 各 $x \in C$ に対して，次の性質を持つ正数の零列 (h_n) と $D(A^{\odot *}) \cap C$ の元の列 (x_n) が存在する：

(R1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n^{-1}\|x_n - h_n(A^{\odot *}+B)x_n - x\| = 0,$

(R2) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} h_n^{-1}[p(x_n) - p(x)] \leq g(p(x))$．

時間依存の発展方程式

$$(5.4)\qquad u'(t) = (A + B(t))u(t), \quad t \geq 0$$

に関する最近の結果を適用することにより次の生成定理を得る．

定理 5.2. 条件 **(R)** が満足されていれば，(5.1), (5.2) を満足する C 上の非線形半群 $\{S(t) : t \geq 0\}$ が存在する．

［証明］ 一意性定理により，任意の $\tau > 0$ と任意の $z \in C$ に対して，次の 3 条件を満たす $[0,\tau]$ 上の X-値強連続関数 $u(\cdot)$ が存在することが示されれば十分である：

$$(5.5)\qquad u(t) \in C, \quad t \in [0,\tau],$$

(5.6) $$u(t)=T(t)z \ + \ (G)-\int_0^t T^{\odot *}(t-s)Bu(s)ds, \quad t\in[0,\tau],$$

(5.7) $$p(u(t))\le m(t;p(z)), \quad t\in[0,\tau]$$

いま $\tau>0,\ z\in C$ とする．任意の $\eta\in(0,\zeta]$ に対して，初期値問題

$$w'(t)=g(w(t))+\eta, \quad t>0; \quad w(0)=p(z)$$

が $[0,\tau]$ 上で最大解 $m^\eta(t;p(z))$ を持ち，$\eta\downarrow 0$ とすれば $m^\eta(t;p(z))\downarrow m(t;p(z))$ ($[0,\tau]$ 上一様) となる様な $\zeta\equiv\zeta(\tau,p(z))>0$ が存在する ([7] の補題 1.3.1 を参照)．まず最初に $\eta\in(0,\zeta]$ に対して，

$$u^\eta(t)=T(t)z \ + \ (G)-\int_0^t T^{\odot *}(t-s)Bu^\eta(s)ds, \quad t\in[0,\tau],$$

$$p(u^\eta(t))\le m^\eta(t;p(z)), \quad t\in[0,\tau]$$

を満たす $[0,\tau]$ 上の X-値強連続関数 $u^\eta(\cdot)$ が存在することを示す．そこで $\alpha=m^\eta(\tau;p(z))$ とおき，ω_α を (H2) によって与えられた定数とする．また各 $t\in[0,\tau]$ に対して

$$\mathcal{D}^\eta(t)\equiv\{x\in C : p(x)\le m^\eta(t;p(z))\}$$

と定義する．作用素 $B^\eta(t):\mathcal{D}^\eta(t)\to X$ を

$$B^\eta(t)x=Bx, \quad x\in\mathcal{D}^\eta(t)$$

によって定義する．次が成り立つ：

(i) 全ての $\mathcal{D}^\eta(t)$ は閉で，$0\le s\le t\le\tau$ に対して，$\mathcal{D}^\eta(s)\subseteq\mathcal{D}^\eta(t)$．

条件 (H2) により定義域 $D(A^{\odot *}+B^\eta(t))=D(A^{\odot *})\cap\mathcal{D}^\eta(t)$ を持つ作用素 $A^{\odot *}+B^\eta(t)$ は次の (ii) を満足する：

(ii) 任意の $s,t\in[0,\tau]$, $x\in D(A^{\odot *}+B^\eta(s))$, $y\in D(A^{\odot *}+B^\eta(t))$ に対して，

$$\langle (A^{\odot *}+B^\eta(s))x-(A^{\odot *}+B^\eta(t))y, x-y\rangle_i\le\omega_\alpha\|x-y\|^2.$$

$t\in[0,\tau)$, $x\in\mathcal{D}^\eta(t)$ とすると，**(R)** により (R1), (R2) を満足する列 (h_n), (x_n) が存在する．g の連続性と条件 (R2) によって，十分大きな n に対して，

$$\begin{aligned}
p(x_n) &\le p(x)+h_n[g(p(x))+\frac{\eta}{2}] \\
&= p(x)+\int_0^{h_n} g(m^\eta(s;p(x))ds \\
&\qquad +\int_0^{h_n}[g(p(x))-g(m^\eta(s;p(x))+\frac{\eta}{2}]ds \\
&\le m^\eta(h_n;p(x)).
\end{aligned}$$

が成り立つ．$p(x) \le m^\eta(t;p(z))$ より十分大きな n に対して，

$$p(x_n) \le m^\eta(h_n; m^\eta(t;p(z))) \le m^\eta(t+h_n;p(z)) \tag{5.8}$$

が出る．これと (R2) とから，

(iii) $\displaystyle \liminf_{h\downarrow 0} h^{-1} d(x, R(I-h(A^{\odot *}+B^\eta(t+h)))) = 0, \quad t\in[0,\tau),\ x\in \mathcal{D}^\eta(t)$.

(i), (ii), (iii) により Kobayasi 他 [5] もしくは Pavel [11] の結果を適用して次の (W) を得る：

(W) 次の条件 (w_1), (w_2), (w_3) を満たす $[0,\tau]$ の分割の列 (Δ_n^η), $(0,\tau]$ 上の $X^{\odot *}$-値階段関数の列 $(\varepsilon_n^\eta(\cdot))$ ，そして $[0,\tau)$ 上の X-値階段関数の列 $(u_n^\eta(\cdot))$ が存在する：

(w_1) 任意の $n\ge 1$ に対して，

$$\Delta_n^\eta = \left\{0 = t_{n,1}^\eta < t_{n,2}^\eta < \cdots < t_{n,N(n)}^\eta \le \tau\right\}$$

$$\varepsilon_n^\eta(t) = \varepsilon_{n,k}^\eta,\ t\in(t_{n,k-1}^\eta, t_{n,k}^\eta],\ 1\le k\le N(n),$$

$$u_n^\eta(0) = x_{n,0}^\eta = z,\ u_n^\eta(t) = x_{n,k}^\eta,\ t\in(t_{n,k-1}^\eta, t_{n,k}^\eta],\ 1\le k\le N(n);$$

$$(t_{n,k}^\eta - t_{n,k-1}^\eta)^{-1}(x_{n,k}^\eta - x_{n,k-1}^\eta) - \varepsilon_{n,k}^\eta = (A^{\odot *}+B^\eta(t_{n,k}^\eta))x_{n,k}^\eta, \quad 1\le k\le N(n);$$

(w_2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le N(n)}(t_{n,k}^\eta - t_{n,k-1}^\eta) = 0,\ \lim_{n\to\infty} t_{n,N(n)}^\eta = \tau,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\tau \|\varepsilon_n^\eta(t)\|dt = 0;$

(w_3) $u_n^\eta(t)$ は $[0,\tau]$ 上で一様に X-値強連続関数 $u^\eta(t)$ に収束する．

$u^\eta(\cdot)$ を (w_3) によって与えられた関数とする．すると明らかに

$$u^\eta(t) \in \overline{D(A^{\odot *})\cap \mathcal{D}^\eta(t)} \subseteq \mathcal{D}^\eta(t), t\in[0,\tau].$$

よって任意の $\eta\in(0,\zeta]$ に対して，

$$p(u^\eta(t)) \le m^\eta(t;p(z)) \le m^\zeta(t;p(z)), \quad t\in[0,\tau]$$

が成り立つ．一意性定理から $u^\eta \equiv u^\zeta$ ($= u$ とおく), $\eta\in(0,\zeta]$ ．従って $p(u(t)) \le m^\eta(t;p(z)), t\in[0,\tau]$ ．$\eta\downarrow 0$ として (5.7) を得る．

最後に，この $u(\cdot)$ が (5.6) を満たしていることを示す．その為に $f\in D(A^\odot)$ とする．条件 (w_1) から任意の $n\ge 1$ と $1\le k\le N(n)$ に対して，

$$\langle x_{n,k}^\eta, f\rangle = \langle x_{n,k-1}^\eta, f\rangle + (t_{n,k}^\eta - t_{n,k-1}^\eta)[\langle x_{n,k}^\eta, A^\odot f\rangle + \langle Bx_{n,k}^\eta, f\rangle + \langle \varepsilon_{n,k}^\eta, f\rangle]$$

これより任意の $t\in(t_{n,k-1}^\eta, t_{n,k}^\eta]$, $n\ge 1$, $1\le k\le N(n)$ に対して

$$\langle u_n^\eta(t), f\rangle = \langle z, f\rangle + \int_0^{t_{n,k}^\eta}[\langle u_n^\eta(s), A^\odot f\rangle + \langle Bu_n^\eta(s), f\rangle + \langle \varepsilon_n^\eta(s), f\rangle]ds$$

を得る．任意の $t \in [0,\tau]$ を取り，$n \to \infty$ のとき $t^{\eta}_{n,k} \to t$ となる様に $t^{\eta}_{n,k}$ を取れば，任意の $t \in [0,\tau]$ に対して

$$\langle u^{\eta}(t), f\rangle = \langle z, f\rangle + \int_0^t [\langle u^{\eta}(s), A^{\odot} f\rangle + \langle Bu^{\eta}(s), f\rangle] ds.$$

命題 2.13 より $u^{\eta}(\cdot)$ が (5.6) を満足している．従って $u(\cdot)$ が (5.6) を満足していることが分る． ■

6. (C_0)-半群の非線形摂動の特徴付け

この節では半線形作用素 $A+B \in \mathfrak{S}^{\odot *}(C,p)$ が (5.1), (5.2) を満足する C 上の非線形半群 $\{S(t) : t \geq 0\}$ を生成する為の必要十分条件を与える．

いま $A+B \in \mathfrak{S}^{\odot *}(C,p)$ で $\{S(t) : t \geq 0\}$ を (5.1), (5.2) を満足する C 上の非線形半群とする．$h>0, \tau>0$ に対して，作用素 $J_{h,\tau} : C \to X$ を次で定義する：

$$J_{h,\tau} x = (a_{h,\tau})^{-1} \int_0^{\tau} e^{-t/h} S(t) x dt, \quad x \in C. \tag{6.1}$$

ここで $a_{h,\tau} = \int_0^{\tau} e^{-t/h} dt = h(1-e^{\tau/h})$ とする．

(6.1) の右辺は $S(\cdot)x$ の局所 Laplace 変換と見なされる．作用素 $J_{h,\tau}$ は $A^{\odot *}+B$ に対する値域条件，即ち作用素 $I-\lambda(A^{\odot *}+B)$, $\lambda>0$ の値域を調べるのに用いられる．

命題 6.1. 半線形作用素 $A+B$ がクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(C,p)$ に属し，$\{S(t) : t \geq 0\}$ を (5.1) と (5.2) を満足する C 上の非線形半群とする．すると，作用素 $J_{h,\tau}$ は次の 5 つの性質を持つ：

(i) $h>0$, $\tau>0$, $x \in C$ とすれば，$J_{h,\tau} x \in D(A^{\odot *}) \cap C$ でかつ

$$(I - hA^{\odot *}) J_{h,\tau} x = x + h(a_{h,\tau})^{-1} \int_0^{\tau} e^{-t/h} BS(t) x dt - he^{-\tau/h}(a_{h,\tau})^{-1}(S(\tau)x - x).$$

(ii) $\tau>0$, $x \in C$ に対して，$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \|(I-hA^{\odot *}) J_{h,\tau} x - (x+hBx)\| = 0$.

(iii) $\tau>0$, $x \in C$ に対して，$\lim_{h \downarrow 0} \|J_{h,\tau} x - x\| = 0$.

(iv) $\tau>0$, $x \in C$ に対して，$\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}[p(J_{h,\tau} x) - p(x)] \leq g(p(x))$.

(v) $\tau>0$, $x \in C$ に対して，$\lim_{h \downarrow 0} p(J_{h,\tau} x) = p(x)$.

［証明］ $h>0, \tau>0$ に対して $J_{h,\tau}$ を (6.1) によって定義されたものとする．$x \in C$ とする．$\alpha = m(\tau; p(x))$ とおけば，(5.2), 条件 (H1), p の凸性及び下半連続性より $J_{h,\tau} x \in C_{\alpha}$. (i) を示すために定理 3.1(v) を適用して，任意の $t>0$ に対して，$\int_0^t S(s) x\, ds \in D(A^{\odot *})$ か

つ $A^{\odot *}\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - x - \int_0^t BS(s)x\,ds$ が成り立つ．この両辺に $(a_{h,\tau})^{-1}e^{-\frac{t}{h}}$ をかけて $(0,\tau]$ 上 t に関して積分して，次を得る：

$$
\begin{aligned}
(6.2)\qquad & (a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau \left[e^{-\frac{t}{h}}A^{\odot *}\int_0^t S(s)x\,ds\right] dt \\
= \ & (a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}(S(t)x - x)\,dt - (a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau \left[e^{-\frac{t}{h}}\int_0^t BS(s)x\,ds\right] dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6.2)\text{の左辺} &= A^{\odot *}\left[(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}\int_0^t S(s)x\,ds\,dt\right] \\
&= A^{\odot *}\left[(a_{h,\tau})^{-1}\left(\left[-he^{-\frac{t}{h}}\int_0^t S(s)x\,ds\right]_0^\tau + h\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}S(t)x\,dt\right)\right] \\
&= A^{\odot *}\left[-h(a_{h,\tau})^{-1}e^{-\frac{\tau}{h}}\int_0^\tau S(t)x\,dt + h(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}S(t)x\,dt\right] \\
&= A^{\odot *}\left[hJ_{h,\tau}x - he^{-\frac{\tau}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau S(t)x\,dt\right] \\
&= hA^{\odot *}J_{h,\tau}x - he^{-\frac{t}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}A^{\odot *}\int_0^\tau S(t)x\,dt
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
(6.2)\text{の右辺} &= J_{h,\tau}x - x + he^{-\frac{\tau}{t}}(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau BS(s)x\,ds - h(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}BS(t)x\,dt \\
&= J_{h,\tau}x - x + he^{-\frac{\tau}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}(S(\tau)x - x) - he^{-\frac{\tau}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}A^{\odot *}\int_0^\tau S(t)x\,dt \\
&\quad -h(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}BS(t)x\,dt
\end{aligned}
$$

従って，

$$
hA^{\odot *}J_{h,\tau}x = J_{h,\tau}x - x + he^{-\frac{\tau}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}(S(\tau)x - x) - h(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}BS(t)x\,dt
$$

を得る．これより，

$$
(I - hA^{\odot *})J_{h,\tau}x = x + h(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}BS(t)x\,dt - he^{-\frac{\tau}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}(S(\tau)x - x).
$$

この様にして (i) を得る．(i) より

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{h}\left[(I - hA^{\odot *})J_{h,\tau}x - (x + hBx)\right] \\
= \ & -Bx + (a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{\tau}{h}}BS(t)x\,dt - e^{-\frac{t}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}(S(\tau)x - x).
\end{aligned}
$$

これと，

$$
(a_{h,\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}}BS(t)x\,dt \xrightarrow{h\downarrow 0} Bx \quad \text{と} \quad e^{-\frac{\tau}{h}}(a_{h,\tau})^{-1} \xrightarrow{h\downarrow 0} 0.
$$

から (ii) を得る．

(iii) は明らか．(iv) を示すために，$\tau > 0, x \in C$ とする．p の凸性と下半連続性及び (5.2) より

$$p(J_{h,\tau}x) \le (a_{h,\tau})^{-1} \int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}} m(t; p(x))\, dt$$

かつ

$$h^{-1}[p(J_{h,\tau}x) - p(x)] \le h^{-1}(a_{h,\tau})^{-1} \int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}} [m(t; p(x)) - p(x)]\, dt$$

部分積分により右辺は次の様に書ける：

$$-e^{-\frac{\tau}{h}}(a_{h,\tau})^{-1}(m(\tau; p(x)) - p(x)) + (a_{h,\tau})^{-1} \int_0^\tau e^{-\frac{t}{h}} g(m(t; p(x))\, dt$$

従って，

$$\limsup_{h \downarrow 0} h^{-1}[p(J_{h,\tau}) - p(x)] \le g(p(x))$$

これにより (iv) が示された．

最後に (iii), (iv) から

$$p(x) \le \liminf_{h \downarrow 0} p(J_{h,\tau}) \le \limsup_{h \downarrow 0} p(J_{h,\tau}) \le p(x)$$

が得られる．それ故 (v) が成り立つ． ■

次の命題は命題 6.1 から明らかである．

命題 6.2. $A + B \in \mathfrak{S}^{\odot *}(C, p)$ とし，$\{S(t) : t \ge 0\}$ を (5.1) と (5.2) を満足する C 上の非線形半群とすれば

(6.3) $$\bigcup_{\alpha > 0} \overline{D(A^{\odot *}) \cap C_\alpha} = C.$$

特に，$D(A^{\odot *}) \cap C$ は C で稠密である．

次の定理は本論文の主定理である．

定理 6.3. $A + B$ をクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(C, p)$ に属する半線形作用素とする．このとき次は同値である：

(I) 次の 2 条件を満たす C 上の非線形半群が存在する：

(I.a) $S(t)x = T(t)x \ + \ (G) - \int_0^t T^{\odot *}(t-s)BS(s)x ds,$

(I.b) $p(S(t)x) \le m(t; p(x)), \quad t \ge 0, \quad x \in C.$

(II) 任意の $x \in C$ に対して，次の性質を満たす正数の零列 (h_n) と $D(A^{\odot *}) \cap C$ の列 (x_n) が存在する：

(II.a) $\lim_{n \to \infty} h_n^{-1} \|(x_n - h_n A^{\odot *} x_n) - (x + h_n Bx)\| = 0.$

(II.b) $\limsup_{n \to \infty} h_n^{-1}[p(x_n) - p(x)] \le g(p(x)).$

(III) $D(A^{\odot *}) \cap C$ は C で稠密で，任意の $\alpha > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \varepsilon) > 0$ が存在して，任意の $x \in C_\alpha$ と任意の $\lambda \in (0, \lambda_0)$ に対して，次を満足する $x_\lambda \in D(A^{\odot *}) \cap C$ が存在する：
(III.a) $x_\lambda - \lambda(A^{\odot *} + B)x_\lambda = x$,
(III.b) $p(x_\lambda) \le p(x) + \lambda[g(p(x)) + \varepsilon]$.

[証明] **(III)** $\Longrightarrow$ **(II)** を示す． **(III)** を仮定すると, 各 $x \in C$ に対して (III.a), (III.b) より次の性質を持つ正数の零列 (h_n) と $D(A^{\odot *}) \cap C$ の列 (x_n) が取れる．:

$$x_n - h_n(A^{\odot *} + B)x_n = x \tag{6.4}$$

$$h_n^{-1}[p(x_n) - p(x)] \le g(p(x)) + 1/n \tag{6.5}$$

更に $D(A^{\odot *}) \cap C$ の C における 稠密性により

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \tag{6.6}$$

が示される．実際，$\varepsilon > 0$ とし，$\|x - y\| \le \varepsilon$ となる様に $y \in D(A^{\odot *}) \cap C$ を取る．十分大きな $\alpha > 0$ を取れば，$x, y \in C_\alpha$ かつ $x_n \in C_\alpha$ $(\forall n)$ と出来る．すると $(A^{\odot *} + B) - \omega_\alpha I$ が $D(A^{\odot *}) \cap C_\alpha$ 上で消散的だから，$1 - h_n\omega_\alpha > 0$ となる n に対して，

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &\le \|x_n - y\| + \|x - y\| \\
&\le (1 - h_n\omega_\alpha)^{-1}\|(I - h_n(A^{\odot *} + B))x_n - (I - h_n(A^{\odot *} + B))y\| + \|x - y\| \\
&\le (1 - h_n\omega_\alpha)^{-1}\|x - y + h_n\|(A^{\odot *} + B)y\| \\
&= \left(1 + (1 - h_n\omega_\alpha)^{-1}\right)\|x - y\| + h_n(1 - h_n\omega_\alpha)^{-1}\|(A^{\odot *} + B)y\|
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで ω_α は (H2) で与えられる実数である．よって, $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| \le 2\|y - x\| \le 2\varepsilon$．$\varepsilon > 0$ が任意だから (6.6) が得られる．また (6.4) より

$$\|(x_n - h_nA^{\odot *}x_n) - (x + h_nBx)\| = h_n\|Bx - Bx_n\|$$

これと B の強連続性から, (II.a) を得る．(II.b) は (6.5) より明かである．

(II) $\Longrightarrow$ **(I)** (II.a) より，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ が得られる．実際，

$$z_n = h_n^{-1}\left[(x_n - h_nA^{\odot *}x_n) - (x + h_nBx)\right]$$

とおけば，仮定より $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$．また n を十分大きくすれば，レゾルベント $(I - h_nA^{\odot *})^{-1}$ が存在し，

$$x_n - x = h_n(I - h_nA^{\odot *})^{-1}z_n + (I - h_nA^{\odot *})^{-1}x - x + h_n(I - h_nA^{\odot *})^{-1}Bx$$

これより，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ を得る．よって，B の強連続性から (R1) が得られるので **(II)** を仮定すれば **(R)** が成り立つことが分かる．これと定理 5.2 (生成定理) から明らかに **(I)** が得られる．

(I) $\Longrightarrow$ (III)（ここで C, p の凸性が用いられる.） 命題 6.2 より $D(A^{\odot *}) \cap C$ が C で稠密だから条件 **(III)** の後半だけ示されればよい. $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ とする. すると, ある $\delta \in (0,1]$ が存在し,

$$\xi,\ \eta \in [0, \alpha+1],\ |\xi - \eta| \le \delta \quad ならば \quad |g(\xi) - g(\eta)| \le \varepsilon/2. \tag{6.7}$$

正数 $\alpha, \varepsilon, \delta$ を用いて,

$$\lambda_0 = \min\left\{1/\overline{\omega},\ \delta/\left(\max_{0 \le \xi \le \alpha+1} g(\xi) + \varepsilon\right)\right\} \tag{6.8}$$

を定義する. ここで $\overline{\omega} = \max\{0, \omega_{\alpha+1}\}$, $\omega_{\alpha+1}$ は条件 (H2) で与えられる数とする. $x \in C_\alpha$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$ とする.

$$\beta = p(x) + \lambda[g(p(x)) + \varepsilon] \tag{6.9}$$

とおく. 以下で (III.a) を満足する $x_\lambda \in D(A^{\odot *}) \cap C_\beta$ を取ることが出来ることを示す. $\tau > 0$, $y \in C_\beta$ に対して,

$$y_h = (1-h)J_{\lambda h,\tau} y + h J_{\lambda h,\tau} x, \quad h \in (0,1]$$

とおく. ここで $J_{\lambda h,\tau}$ は (6.1) で定義された作用素とする. すると, 命題 6.1 によって,

$$y_h \in D(A^{\odot *}) \cap C, \quad h \in (0,1] \quad ; \quad y_h \to y \text{ as } h \to 0+, \tag{6.10}$$

かつ

$$\begin{aligned} & \|y_h - \lambda h A^{\odot *} y_h - (y + \lambda h B y - h y + h x)\| \\ \le\ & (1-h)\|J_{\lambda h,\tau} y - \lambda h A^{\odot *} J_{\lambda h,\tau} y - (y + \lambda h B y)\| \\ & \quad + h\|J_{\lambda h,\tau} x - \lambda h A^{\odot *} J_{\lambda h,\tau} x - (x + \lambda h B x)\| + \lambda h^2 \|Bx - By\| \\ =\ & \lambda o(h) + \lambda h^2 \|Bx - By\| \quad \text{as } h \to 0+. \end{aligned} \tag{6.11}$$

次に,

$$十分小さな\ h \in (0,1]\ に対して \quad y_h \in C_\beta \tag{6.12}$$

となることを示す. もしも $p(y) < \beta$ ならば (6.12) は

$$\limsup_{h \downarrow 0} p(y_h) \le \limsup_{h \downarrow 0} [(1-h)p(J_{\lambda h,\tau} y) + h p(J_{\lambda h,\tau} x)] = p(y).$$

から出る.（最後の等号は命題 6.1(v) から出る.） もしも $p(y) = \beta$ ならば, 命題 6.1 より十分小さな $h \in (0,1]$ に対して,

$$\begin{aligned} p(y_h) &\le (1-h)p(J_{\lambda h,\tau} y) + h p(J_{\lambda h,\tau} x) \\ &\le (1-h)[p(y) + \lambda h(g(p(y)) + \varepsilon/4)] + h[p(x) + \lambda\varepsilon/4] \\ &\le (1-h)p(y) + h[p(x) + \lambda(g(p(y)) + \varepsilon/2)]. \end{aligned} \tag{6.13}$$

(6.8), (6.9) から $p(y) = \beta \leq \alpha + \delta \leq \alpha + 1$ かつ $|p(y) - p(x)| \leq \delta$. 従って (6.7) より $g(p(y)) \leq g(p(x)) + \varepsilon/2$. また

$$(1-h)p(y) + h[p(x) + \lambda(g(p(x)) + \varepsilon)] = \beta$$

より，前述の不等式 (6.13) から (6.12) が得られる．作用素 B_β を作用素 B の C_β への制限作用素であると定義する．ここで $+x$ は x による平行移動を表す． (6.10), (6.11), (6.12) から，$\lambda A^{\odot *} + \lambda B_\beta - I + x$ は次の性質を持つクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(C_\beta, 0)$ に属する半線形作用素である：

$$\overline{D(A^{\odot *} + \lambda B_\beta - I + x)} = \overline{D(A^{\odot *}) \cap C_\beta} = C_\beta;$$

$$\lim_{n \downarrow 0} h^{-1} d(y, R(I - h(\lambda A^{\odot *} + \lambda B_\beta - I + x))) = 0, \quad \forall y \in C_\beta.$$

従って定理 5.2 と命題 5.1 により次の性質を持つ C_β 上の非線形半群 $\{S_\lambda(t) : t \geq 0\}$ が存在する：

$$S_\lambda(t)y = T(\lambda t)y \ + \ (G) - \int_0^t T^{\odot *}(\lambda(t-s))[\lambda B S_\lambda(s)y - S_\lambda(s)y + x]ds, \tag{6.14}$$

$$\|S_\lambda(t)y - S_\lambda(t)z\| \leq e^{(\lambda\overline{\omega}-1)t}\|y - z\|, \quad t \geq 0, \quad y \in C_\beta, \quad z \in C_\beta \tag{6.15}$$

ここで $\overline{\omega} = \max\{0, \omega_{\alpha+1}\}$ とする．$\lambda\overline{\omega} < 1$ だから (6.15) により $\{S_\lambda(t)\}$ は共通の不動点を持つことが分る．即ち，

$$S_\lambda(t)x_\lambda = x_\lambda, \quad \forall\, t \geq 0 \tag{6.16}$$

となる一意な $x_\lambda \in C_\beta$ が存在する．$\lambda A^{\odot *} + \lambda B_\beta - I + x$ は $\{S_\lambda : t \geq 0\}$ の汎弱生成作用素だから，(6.16) から $x_\lambda \in D(A^{\odot *}) \cap C_\beta$ かつ

$$\lambda(A^{\odot *} + B)x_\lambda - x_\lambda + x = 0.$$

これは x_λ が (III.a) と (III.b) を満足していることを示している． $x \in C_\alpha$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$ が任意だから，**(I)** より **(III)** が従うことが示された． ■

注意. 条件 (H2) によって **(III)** が成り立つならば，任意の $\alpha > 0$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \varepsilon) > 0$ とある $\beta > 0$ を取れば，任意の $x \in C_\alpha$ と $\omega_\beta \lambda < 1$ となる任意の $\lambda \in (0, \lambda_0)$ に対して，(III.a) を満たす x_λ は C_β から一意に取れる．つまり B_β を B の C_β への制限とすれば，レゾルベント

$$(I - \lambda(A^{\odot *} + B_\beta))^{-1} : C_\alpha \to C_\beta$$

が存在する．

7. $\{S(t)\}$ に関する指数公式

本節では前節で与えられた連続非線形半群 $\{S(t)\}$ が指数公式を満足することを見る．

定理 7.1. $A+B$ をクラス $\mathfrak{G}^{\odot *}(C,p)$ の半線形作用素とする．定理 6.3 の条件 (III) が作用素 $A+B$ に対して成立するならば条件 (I) を満足する C 上の唯一の非線形半群 $\{S(t)\}$ は任意の $\alpha>0$，$\tau>0$，$\beta>m(\tau;\alpha)$ に対して指数公式

$$S(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}\left(A^{\odot *}+B_\beta\right)\right)^{-n}x,\ t\in[0,\tau],\ x\in C_\alpha \tag{7.1}$$

によって与えられる．

［証明］ $\alpha>0$，$\tau>0, \beta>m(\tau;\alpha)$ とする．すると定理 5.2 の証明と同様にして，任意の $\gamma\geq 0$ に対して，ある $\zeta\equiv\zeta(\tau,\gamma)>0$ が存在して，任意の $2\eta\in(0,\zeta]$ に対して，初期値問題

$$w'(t)=g(w(t))+2\eta,\quad t>0\quad;\quad w(0)=\gamma \tag{7.2}$$

が $[0,\tau]$ 上で最大解 $m^{2\eta}(\cdot;\gamma)$ を持ち $\eta\downarrow 0$ とすれば $m^{2\eta}(\cdot;\alpha)\downarrow m(\cdot;\alpha)$ ($[0,\tau]$ 上一様) と出来る．いま $\beta>\beta_0>m(\tau,\alpha)$ となる β_0 を任意に取る．$\zeta_0=\min\{\zeta(\tau,\alpha),\zeta(\tau,\beta_0)\}>0$ とおく．$2\eta\in(0,\zeta_0]$ とすれば，$[0,\tau]$ 上で最大解 $m^{2\eta}(\cdot;\alpha)$，$m^{2\eta}(\cdot;\beta_0)$ が存在して，$m(t;\beta_0)\leq m^{2\eta}(t;\beta_0)$ $(\forall t\in[0,\tau])$ かつ $m(\tau;\alpha)\leq m^{2\eta}(\tau;\alpha)<\beta_0$ と出来る．また $m^{2\eta}(\cdot;\beta_0)$ が初期値問題 (7.2) の $[0,\tau]$ 上の最大解だから任意の $0\leq\gamma\leq\beta_0$ に対して，γ を初期値とする (7.2) の最大解 $m^{2\eta}(\cdot;\gamma)$ が $[0,\tau]$ 上で存在し，$m^{2\eta}(t;\gamma)\leq m^{2\eta}(t;\beta_0)$ $(\forall\in[0,\tau])$ となる[1]．$\lambda_0=\lambda_0(\alpha,\eta)$ を $\alpha>0$ と $\eta>0$ に対して定理 6.3 の (III) で取られた定数とする．まず $\beta>\beta_0+\lambda_1[\max_{0\leq\xi\leq\beta_0}g(\xi)+\eta]$ ($=\beta_1$ とおく) かつ $\lambda_1\omega_\beta<1$ となるとなる様に $0<\lambda_1<\lambda_0$ を選ぶ．すると任意の $x\in C_{\beta_0}$ と $\lambda\in(0,\lambda_1)$ に対して $A^{\odot *}+B$ の $D(A^{\odot *})\cap C_\beta$ での準消散性により (III) を満たす x_λ は C_{β_1} で一意に定まる．従って $\lambda\in(0,\lambda_1)$ に対してレゾルベント，

$$\left(I-\lambda\left(A^{\odot *}+B_{\beta_1}\right)\right)^{-1}:C_{\beta_0}\to C_{\beta_1}$$

が定義される．g が $[0,m^{2\eta}(\tau;\beta_0)]$ 上で一様連続だから，

$$\exists\delta>0,\ \forall\xi,\ \forall\eta\in[0,m^{2\eta}(\tau;\beta_0)]\quad:\quad|\xi-\eta|\leq\delta\Longrightarrow|g(\xi)-g(\eta)|<\eta.$$

$C(\tau,\beta_0)=\sup\{g(\xi):0\leq\xi\leq m^{2\eta}(\tau;\beta_0)\}$ とおけば，

$$\forall\xi\in[0,\beta_0],\ \forall s\in[0,\tau]\quad:\quad\left|m^{2\eta}(s;\xi)-\xi\right|\leq(C(\tau,\beta_0)+2\eta)s.$$

従って $0\leq s\leq\delta/(C(\tau,\beta_0)+2\eta)$ とすれば $\sup_{0\leq\xi\leq\beta_0}\left|m^{2\eta}(s;\xi)-\xi\right|\leq\delta$ だから，

$$\forall\xi\in[0,\beta_0]\quad:\quad\left|g(\xi)-g(m^{2\eta}(s;\xi))\right|<\eta. \tag{7.3}$$

[1] $m^{2\eta}(\cdot;\gamma)$ の最大性と解の延長可能定理から容易に示される

$\widetilde{\lambda} = \min\{\delta/(C(\tau,\beta_0)+2\eta), \lambda_1, \tau\} > 0$ とおく．任意の $t \in [0,\tau]$ に対して十分大きな n に対して $t/n < \widetilde{\lambda}$ となる．この n を固定する．任意の $x \in C_\alpha$ ($\subseteq C_{\beta_0}$) に対して (III.b) と (7.3) より

$$\begin{aligned} & p\left(\left(I - \frac{t}{n}\left(A^{\odot *} + B_{\beta_1}\right)\right)^{-1} x\right) \le p(x) + \frac{t}{n}[g(p(x)) + \eta] \\ = \ & p(x) + \int_0^{\frac{t}{n}} g(m^{2\eta}(s;p(x)))\,ds + \int_0^{\frac{t}{n}} \left[g(p(x)) - g(m^{2\eta}(s;p(x)) + \eta\right] ds \\ = \ & m^{2\eta}\left(\frac{t}{n};p(x)\right) \le m^{2\eta}(\tau;\alpha) < \beta_0. \end{aligned}$$

よって $\left(I - \frac{t}{n}(A^{\odot *} + B_{\beta_1})\right)^{-1} x \in C_{\beta_0}$．同様にして $1 \le k \le n$ なる任意の k に対して，

$$p\left(\left(I - \frac{t}{n}\left(A^{\odot *} + B_{\beta_1}\right)\right)^{-k} x\right) \le m^{2\eta}\left(\frac{kt}{n};p(x)\right) \le m^{2\eta}(\tau;\alpha) < \beta_0.$$

従って $1 \le k \le n$ に対して，$\beta > \beta_1$ だから

$$\left(I - \frac{t}{n}\left(A^{\odot *} + B_{\beta}\right)\right)^{-k} x = \left(I - \frac{t}{n}\left(A^{\odot *} + B_{\beta_1}\right)\right)^{-k} x \in C_{\beta_0} \subseteq C_\beta$$

が成り立つ．定理 5.2 の証明から (I) を満足する非線形連続半群 $\{S(t)\}$ が生成される．■

8. 順序の保存性

$(X, |\cdot|, \le)$ を半順序 Banach 空間とし，正錐 $P = \{x \in X : x \ge 0\}$ が閉集合であると仮定する．C 上の非線形半群 $\{S(t)\}$ が保順序的であるとは，任意の $x, y \in C, x \le y$ に対して，$S(t)x \le S(t)y$, $t \ge 0$ が成り立つことをいう．$\mathcal{X} = X \times X$ とおく．各 $(x,y) \in \mathcal{X}$ に対してノルムを $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ (x, $y \in X$) で定義する．また $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathcal{X} : x \le y,\ x,\ y \in C\}$ とおく．いま $\{S(t)\}$ を C 上の連続非線形半群とすれば，

$$\mathcal{S}(t)(x,y) = (S(t)x, S(t)y),\ x,\ y \in X$$

によって定義される $\mathcal{X}$ 上の作用素族 $\{\mathcal{S}(t)\}$ は連続非線形半群になる．このとき $\{S(t)\}$ が保順序的となるための必要十分条件は $\{\mathcal{S}(t)\}$ が $\mathcal{C}$ 上の連続非線形半群となることである．$p : X \to [0,\infty]$ を X 上の下半連続凸関数で $p \not\equiv \infty$ であるとする．いま，$\boldsymbol{p}((x,y)) = \max\{p(x), p(y)\}$, $(x,y) \in \mathcal{X}$ によって汎関数 $\boldsymbol{p}$ を定義すれば，$\boldsymbol{p}$ は $\mathcal{X}$ 上の proper な下半連続凸汎関数となる．いま $A + B$ がクラス $\mathfrak{G}^{\odot *}(C,p)$ に属する半線形作用素とする．$\mathcal{T}(t)(x,y) = (T(t)x, T(t)y)$, $(x,y) \in \mathcal{X}$ によって $\mathcal{X}$ 上 (C_0)-半群を定義すると，その無限小生成作用素 $\mathcal{A}$ は

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= D(A) \times D(A) \subset \mathcal{X}, \\ \mathcal{A}(x,y) &= (Ax, Ay), \quad (x,y) \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

しかも次のことが容易に確かめられる．

1.

$$D(\mathcal{A}^*) = D(A^*) \times D(A^*),$$
$$\mathcal{A}^*(x^*, y^*) = (A^*x^*, A^*y^*),\ (x^*, y^*) \in D(\mathcal{A}^*).$$

2. $\mathcal{X}^{\odot} = \overline{D(\mathcal{A}^*)} = X^{\odot} \times X^{\odot}$.

3. $\mathcal{A}^{\odot *}(x^{\odot *}, y^{\odot *}) = (A^{\odot *}x^{\odot *}, A^{\odot *}y^{\odot *}),\ \forall (x^{\odot *}, y^{\odot *}) \in D(\mathcal{A}^{\odot *})$.

また $\mathcal{B}(x,y) = (Bx, By),\ (x,y) \in \mathcal{C}$ によって $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{X}^{\odot *}$-値非線形作用素 $\mathcal{B}$ を定義すれば，$\mathcal{A} + \mathcal{B}$ はクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(\mathcal{C}, \boldsymbol{p})$ に属する半線形作用素であることが分る．実際，次の 2 条件 $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ を満足する：

$(\mathcal{H}1)$ $\mathcal{C} \subset D(\boldsymbol{p}) = \{(x,y) \in \mathcal{X} : \boldsymbol{p}((x,y)) < \infty\}$ かつ任意の $\alpha > 0$ に対して，$\mathcal{C}$ のレベル集合 $\mathcal{C}_\alpha = \{(x,y) \in \mathcal{C} : \boldsymbol{p}((x,y)) \le \alpha\}$ は閉集合で，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}_\alpha$ 上強連続.

$(\mathcal{H}2)$ 任意の $\alpha > 0$ に対して, 半線形作用素 $\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B}$ は $D(\mathcal{A}^{\odot *}) \cap \mathcal{C}_\alpha$ 上 $\mathcal{X}^{\odot *}$ で準消散的．つまり，ある $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in D(\mathcal{A}^{\odot *}) \cap \mathcal{C}_\alpha$ と任意の $\lambda > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} & \|(x_1,x_2) - (y_1,y_2) - \lambda[(\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B})(x_1,x_2) - (\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B})(y_1,y_2)]\| \\ \ge\ & (1 - \lambda\omega_\alpha)\|(x_1,x_2) - (y_1,y_2)\| \end{aligned}$$

$(\mathcal{H}1)$ は明かだから，$(\mathcal{H}2)$ を示す．仮定 (H2) より，ある $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，任意の x, $y \in D(A^{\odot *}) \cap C_\alpha$ と任意の $\lambda > 0$ に対して，

$$\|x - y - \lambda[(A^{\odot *} + B)x - (A^{\odot *} + B)y]\| \ge (1 - \lambda\omega_\alpha)\|x - y\|$$

が成り立つ．従って，任意の (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in D(\mathcal{A}^{\odot *}) \cap \mathcal{C}_\alpha$ と任意の $\lambda > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} & \|(x_1,x_2) - (y_1,y_2) - \lambda[(\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B})(x_1,x_2) - (\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B})(y_1,y_2)]\| \\ =\ & \|x_1 - y_1 - \lambda[(A^{\odot *} + B)x_1 - (A^{\odot *} + B)y_1]\| \\ & + \|x_2 - y_2 - \lambda[(A^{\odot *} + B)x_2 - (A^{\odot *} + B)y_2]\| \\ \ge\ & (1 - \lambda\omega_\alpha)\|x_1 - y_1\| + (1 - \lambda\omega_\alpha)\|x_2 - y_2\| \\ =\ & (1 - \lambda\omega_\alpha)(\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|) \\ =\ & (1 - \lambda\omega_\alpha)\|(x_1,x_2) - (y_1,y_2)\| \end{aligned}$$

定理 8.1. $A + B$ をクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(C, p)$ に属する半線形作用素とする．このとき次は同値である：

(I′) 定理 6.3 の (I) の条件 (I.a), (I.b) を満たす C 上の保順序連続非線形半群 $\{S(t)\}$ が存在する．

(III′) $D(A^{\odot *}) \cap C$ は C で稠密で，任意の $\alpha > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \varepsilon) > 0$ が存在して，任意の $\lambda \in (0, \lambda_0)$ と任意の $\beta \geq \alpha + \lambda[\max_{0 \leq \xi \leq \alpha} g(\xi) + \varepsilon]$ に対して，

(III′.a) $R(I - \lambda(A^{\odot *} + B_\beta)) \supset C_\alpha$. ここで B_β は B の C_β への制限である．

(III′.b) またレゾルベント $(I - \lambda(A^{\odot *} + B_\beta))^{-1} : C_\alpha \to C_\beta$ が存在し，任意の $x \in C_\alpha$ に対して $p((I - \lambda(A^{\odot *} + B_\beta))^{-1} x) \leq p(x) + \lambda[g(p(x)) + \varepsilon]$.

(III′.c) レゾルベント $(I - \lambda(A^{\odot *} + B_\beta))^{-1} : C_\alpha \to C_\beta$ は保順序的 である．

［証明］ **(I′)** $\Longrightarrow$ **(III′)** : **(I′)** を仮定すれば，

$$\mathcal{S}(t)(x,y) = \mathcal{T}(t)(x,y) \ + \ (G) - \int_0^t \mathcal{T}^{\odot *}(t-s)\mathcal{B}\mathcal{S}(t)(x,y)\,ds, \tag{8.1}$$

が成り立つことが分る．また m の最大性より，

$$\boldsymbol{p}(\mathcal{S}(t)(x,y)) \leq m(t; \boldsymbol{p}((x,y))),\ t \geq 0,\ (x,y) \in \mathcal{C} \tag{8.2}$$

が成り立つ．また上で述べたことから半線形作用素 $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ はクラス $\mathfrak{S}^{\odot *}(\mathcal{C}, \boldsymbol{p})$ に属するから，定理 6.3 とその後の注意により

$D(\mathcal{A}^{\odot *}) \cap \mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ で稠密で，任意の $\alpha > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \varepsilon) > 0$ が存在して，$\lambda\omega_\beta < 1$ を満たす任意の $\lambda \in (0, \lambda_0)$ と任意の $\beta \geq \alpha + \lambda[\max_{0 \leq \xi \leq \alpha} g(\xi) + \epsilon]$ に対して，

(a) $R(I - \lambda(\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B}_\beta)) \supset \mathcal{C}_\alpha$. ここで $\mathcal{B}_\beta$ は $\mathcal{B}$ の $\mathcal{C}_\beta$ への制限である．

(b) またレゾルベント $(I - \lambda(\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B}_\beta))^{-1} : \mathcal{C}_\alpha \to \mathcal{C}_\beta$ が存在し，任意の $x \in \mathcal{C}_\alpha$ に対して

$$\boldsymbol{p}((I - \lambda(\mathcal{A}^{\odot *} + \mathcal{B}_\beta))^{-1} x) \leq \boldsymbol{p}(x) + \lambda[g(\boldsymbol{p}(x)) + \varepsilon].$$

これより **(III′)** の成立は明かである．

(III′) $\Longrightarrow$ **(I′)** : **(III′)** より任意の $\alpha > 0$ と，$x \leq y$ なる任意の $x, y \in C_\alpha$ に対して，十分大きな $\beta > 0$ を取れば，正数の零列 (h_n) が存在して，

$$\left(I - h_n(A^{\odot *} + B_\beta)\right)^{-1} x \leq \left(I - h_n(A^{\odot *} + B_\beta)\right)^{-1} y$$

が成り立つ．いま

$$x_n = \left(I - h_n(A^{\odot *} + B_\beta)\right)^{-1} x, \quad y_n = \left(I - h_n(A^{\odot *} + B_\beta)\right)^{-1} y$$

とおく．定理 6.3 の **(III)** $\Longrightarrow$ **(II)** の証明と同様にして，$D(A^{\odot *}) \cap C$ の C における稠密性と条件 (H2) より，

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n, \quad y = \lim_{n \to \infty} y_n$$

が示される．従って $D(\mathcal{A}^{\odot *}) \cap \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ で稠密であることが分る．このことと定理 6.3 により，(8.1), (8.2) を満足する $\mathcal{C}$ 上の非線形半群 $\{\mathcal{S}(t)\}$ が存在する．よって **(I′)** が満足される． ■

9. ある一階偏微分方程式への応用

次の偏微分方程式の解を作用素論的に求めることを考える．

$$(PDE)_4 \quad \begin{cases} u_t(t,a) + u_a(t,a) + d(a, \|u(t,\cdot)\|_{L^1})u(t,a) = 0, & t>0,\ 0<a<1 \\ u(t,0) = \int_0^1 \beta(a, \|u(t,\cdot)\|_{L^1})u(t,a)da, & t \geq 0 \\ u(0,a) = \psi(a), & 0 \leq a \leq 1\,. \end{cases}$$

ここで $\beta : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ は有界関数で，$\{\beta(a,\cdot) : 0 \leq a \leq 1\}$ は同程度局所 Lipschitz 連続であるとする．$\beta_0 = \sup\{\beta(a,\xi) : 0 \leq a \leq 1,\ 0 \leq \xi\}$ とおく． また，$d(\cdot,\cdot) : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ を有界関数で $d_0 = \inf\{d(a,\xi) : 0 \leq a \leq 1; 0 \leq \xi\} > 0$，しかも，$\{d(a,\cdot) : 0 \leq a \leq 1\}$ は同程度局所 Lipschitz 連続とする．

本節の詳細については [6] を見よ．

上の $(PDE)_4$ を $L^1[0,1]$ で解くことを考える．$\psi \in L^1_+[0,1]$ で与えたとき $L^1_+[0,1]$ の中で解 (これを今後正値解という) を求める事を考える．

$$(PDE)_1 \quad \begin{cases} m_t(t,a) - m_a(t,a) = 0, & t>0,\ 0<a<1 \\ m(t,1) = 0, & t \geq 0 \\ m(0,a) = \phi(a), & 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

$$(EE)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{dm(t)}{dt} = A_0 m(t), \\ m(0) = \phi. \end{cases}$$

$A = A_0^{\odot}$ と置く．

$$(PDE)_2 \quad \begin{cases} n_t(t,a) + n_a(t,a) = 0, & t>0,\ 0<a<1 \\ n(t,0) = 0, & t \geq 0 \\ n(0,a) = \psi(a), & 0 \leq a \leq 1\,. \end{cases}$$

$$(EE)_2 \quad \begin{cases} \dfrac{dn(t)}{dt} = A_0^{\odot} n(t) = An(t), \\ n(0) = \psi. \end{cases}$$

$$(PDE)_3 \quad \begin{cases} \ell_t(t,a) + \ell_a(t,a) = 0, & t>0,\ 0<a<1 \\ \ell(t,0) = \int_0^1 \beta(a, \|\ell(t,\cdot)\|_{L^1})\ell(t,a)da, & t \geq 0 \\ \ell(0,a) = \psi(a), & 0 \leq a \leq 1\,. \end{cases}$$

$$(EE)_3 \qquad \begin{cases} \dfrac{d\ell(t)}{dt} = (A_0^{\odot\odot *} + B)\ell(t) = (A^{\odot *} + B)\ell(t), \\ \ell(0) = \psi. \end{cases}$$

結局 $(PDE)_4$ に対応する発展方程式は，

$$(EE)_4 \qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = (A^{\odot *} + B + F)u(t), \\ u(0) = \psi. \end{cases}$$

となる．ここで，B, F は後で定義される非線形作用素とする．

上の (PDE), (EE) について順次解説する．まず，$(PDE)_4$ から外力項を取り去り，境界条件を 0 と置いた方程式 $(PDE)_1$ を考える．またその為に，それと共役の関係にある $(PDE)_1$ を空間 $Y = C_0[0,1] = \{y \in C[0,1] : y(1) = 0\}$ で考える．それを Y 上の発展方程式として捉え，$(EE)_2$ を考える．ここで A_0 は

$$D(A_0) = C_0^1[0,1] = \{y \in C^1[0,1] : y(1) = y'(1) = 0\} \quad ; \quad A_0 y = y', \quad y \in D(A_0)$$

と定義される．また A_0 が生成する半群は次によって定義される縮小半群である．

$$[T_0(t)\phi](a) = \begin{cases} \phi(t+a) & t \le 1-a, \\ 0 & t > 1-a. \end{cases}$$

$(EE)_2$ が $(EE)_1$ の共役であることを見るために，まず Y の共役空間を特徴付けなければならない．$M[0,1]$ で $[0,1]$ 上の Radon 測度の全体，つまり $C[0,1]$ の共役空間を表す．Y の共役空間は

$$Y^* = \{\mu \in M[0,1] : \mu(\{1\}) = 0\},$$

と表される．実際 δ_1 を 1 点 "1" に support を持つ Dirac 測度とすると，Y は $C[0,1]$ 上の有界線形作用素 δ_1 の null space

$$Y = \{\delta_1\}_\perp = \{y \in C[0,1] : \delta_1(y) = y(1) = 0\}$$

と表される．従って双極定理より

$$Y^\perp = \{\mu \in M[0,1] : \langle \mu, y \rangle = 0,\ \forall y \in Y\} = \{\alpha\delta_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

一方 $Y^* \cong C[0,1]^*/Y^\perp = M[0,1]/Y^\perp = M[0,1]/[\delta_1]$ が成り立つ．いま $\mu \in M[0,1]$, $\mu(\{1\}) = 0$ とすれば，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\mu + \alpha\delta_1\| &= |\mu + \alpha\delta_1|([0,1]) + |\mu + \alpha\delta_1|(\{1\}) \\ &= |\mu|([0,1)) + |\alpha| = \|\mu\| + |\alpha| \ge \|\mu\| \end{aligned}$$

が成り立つ．これにより $\|\mu\| = \inf_\alpha \|\mu + \alpha\delta_1\| = \|[\mu]\|$ ．

また共役半群は

$$(T_0^*(t)\mu)(E) = \mu(E_t), \quad E \in \mathcal{B}[0,1].$$

ここで $\mathcal{B}[0,1]$ は $[0,1]$ の Borel 集合の全体を表し，$E_t = [0,1] \cap \{s-t : s \in E\}$ とする．汎弱生成作用素 A_0^* は

$$D(A_0^*) = \{\mu \in M_{AC}[0,1] : h_\mu(a) = \nu_\mu([0,a)), a \in (0,1], \text{ for some } \nu_\mu \in Y^*\},$$

$$A_0^*\mu = -\nu_\mu \quad \text{for } \mu \in D(A_0^*).$$

ここで $M_{AC}[0,1]$ は $[0,1]$ 上の（ Lebesgue 測度 m に関して）絶対連続な Borel 測度の全体，h_μ は μ の Lebegue 測度に関する Radon-Nikodým 導関数を表す．

$$Y^\odot = \overline{D(A_0^*)} = M_{AC}[0,1],$$

$M_{AC}[0,1]$ と $L^1[0,1]$ を同一視すれば，

$$Y^\odot = L^1[0,1].$$

また，

$$D(A_0^\odot) = \{\psi \in AC[0,1] : \psi(0) = 0\}, \quad A_0^\odot\psi = -\psi' \text{ for } \psi \in D(A_0^\odot).$$

と表される．実際，$\mu \in D(A_0^\odot)$ とすれば，$\mu \in D(A_0^*)$ で，$\nu_\mu \in M_{AC}[0,1]$ を取ると，

$$h_\mu = \frac{d\mu}{dm} \quad (= \psi \text{ とおく}) \in AC[0,1]$$

で $\psi(a) = h_\mu(a) = \nu_\mu(a) = \nu_\mu([0,a))$ が成り立つ．ν_μ が（絶対）連続であるから

$$\psi(0) = \lim_{a\to 0+} \psi(a) = \lim_{a \to 0+} \nu_\mu([0,a)) = 0.$$

従って $M_{AC}[0,1]$ を $L^1[0,1]$ と同一視すれば，

$$A_0^\odot\psi = -\psi'.$$

よって

$$D(A_0^\odot) \subseteq \{\psi \in AC[0,1] : \psi(0) = 0\}$$

逆に，$\psi \in AC[0,1], \psi(0) = 0$ とする．

$$\mu(A) = \int_A \psi(s)\,ds, \quad \nu_\mu(A) = \int_A \psi'(s)\,ds$$

とおけば，$h_\mu(a) = \psi(a) = \psi(a) - \psi(0) = \int_0^a \psi'(s)\,ds = \nu_\mu([0,a))$．故に，$\mu \in D(A_0^*)$．更に，$A_0^*\mu = -\nu_\mu \in M_{AC}[0,1]$ より $\mu \in D(A_0^\odot)$．従って，$L^1[0,1]$ 上の Cauchy 問題 $(EE)_2$ を得る．

更に，共役を取っていくと，

$$Y^{\odot *} = L^\infty[0,1], \quad (T_0^{\odot *}(t)\phi)(a) = \begin{cases} \phi(a+t) & a+t \le 1 \\ 0 & a+t > 1\,, \end{cases}$$

$$D(A_0^{\odot *}) = \{\phi \in \mathrm{Lip}[0,1] : \phi(1) = 0\}\,, \quad A_0^{\odot *}\phi = \phi'.$$

と表される．ここで Lip[0,1] は [0,1] 上の Lipschitz 連続な関数の全体とする．実際，$\phi \in D(A_0^{\odot *})$ $(\subseteq L^\infty[0,1])$ とする．いま $C_c^1[0,1] = \{\phi \in C^1[0,1] : \phi(0) = \phi(1) = 0\}$ とおくと，任意の $\phi \in C_c^1[0,1] \subseteq D(A_0^{\odot}) \subseteq L^1[0,1]$ に対して，

$$\langle A^{\odot *}\phi, \psi\rangle = \langle \phi, A_0^{\odot}\psi\rangle = -\langle \phi, \psi'\rangle = -\int_0^1 \phi\psi'\,ds.$$

$A_0^{\odot *}\phi \in L^\infty[0,1]$ だから，

$$A_0^{\odot *}\phi = \phi' \quad a.e.$$

従って ϕ は Lipscitz 連続な関数として取ることが出来る．$\psi \in S(A_0^{\odot}),\ \psi(1) \neq 0$ となる元を任意に取ると，$\phi \in D(A^{\odot *})$ に対して

$$\langle A_0^{\odot *}\phi, \psi\rangle = -\int_0^1 \phi\psi'\,ds = -[\phi\psi]_0^1 + \int_0^1 \phi'\psi\,ds = -\phi(1)\psi(1) + \langle A_0^{\odot *}\phi, \psi\rangle.$$

故に，$\phi(1)\psi(1) = 0,\ \psi(1) \neq 0$ より $\phi(1) = 0$ が得られる．

また $Y^{\odot\odot} = \overline{D(A_0^{\odot *})} = Y = C_0[0,1]$ だから Y が 半群 $\{T_0(t)\}$ に関して $\odot$-回帰的，従って $Y^{\odot}$ も $\{T_0^{\odot}(t)\}$ に関して $\odot$-回帰的であることが分る．そこで $X = Y^{\odot}(= L^1[0,1])$，$T(t) = T_0^{\odot}(t)$，$A = A_0^{\odot}$ と置けば一般論に乗せられる．

次に，非線形境界条件を $(PDE)_2$ に付加えた $(PDE)_3$ を考察する．$C \subset X$ として $C = L_+^1[0,1] = M_{AC}^+[0,1]$ とする．すると C は $\sigma(X, X^{\odot})$-closed である．$C' \subseteq X^{\odot *} = Y^{\odot\odot *} = Y^*$ を $C' = Y_+^* = \{\mu \in M^+[0,1] : \mu(\{1\}) = 0\}$ とする．このとき，$C = C' \cap X$ である．

$B : C \to C'$ を次式で定義する．

$$B\mu = \left(\int_0^1 \beta(a, \|\mu\|)d\mu\right)\delta_0.$$

ここで $\|\mu\|$ は μ の全変動，δ_0 は原点に support を持つ Dirac 測度を表す．A に B を加える為に，A を拡張して $A^{\odot *}$ を取り，$A^{\odot *} + B$ の X に於ける部分として A_1 を定義する．すると，

$$D(A_1) = \{x \in D(A^{\odot *}) \cap C : (A^{\odot *} + B)x \in X\}, \quad A_1 x = A^{\odot *}x + Bx \quad \text{for } x \in D(A_1).$$

X が $\odot$-回帰的 だから $A_0 = A_0^{\odot\odot}$，従って $A^{\odot *} = A_0^*$ が成り立つ．故に

$$D(A_1) = \{x \in D(A_0^*) \cap C : (A_0^* + B)x \in X\}, \quad A_1 x = A_0^* x + Bx \quad \text{for } x \in D(A_1).$$

と表される．また $X = L^1[0,1]$ より，具体的に

$$D(A_1) = \left\{\psi \in AC[0,1]^+ : \psi(0) = \int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da\right\}, \quad A_1\psi = -\psi' \text{ for } \psi \in D(A_1).$$

と表されることが分る．実際，$\varphi \in C_c^1[0,1] \subseteq D(A_0), \psi \in D(A_1)$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&= \langle \varphi, A_0^*\psi + B\psi\rangle \\
&= \langle A_0\varphi, \psi\rangle + \langle \varphi, B\psi\rangle \\
&= \langle \varphi', \psi\rangle + \varphi(0)\int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da \\
&= \langle \varphi', \psi\rangle.
\end{aligned}$$

よって，$A_1\psi = -\psi'$ (超関数の意味で)．従ってある $\widetilde{\psi} \in AC[0,1]$ があり，$\widetilde{\psi} = \psi$ $a.e.$ となる．この様に $D(A_1)$ の元は $AC[0,1]$ の元であると見做される．いま $\varphi \in D(A_0)$, $\varphi(0) \neq 0$ なる元を任意に取ると $\forall\psi \in D(A_1)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi, A_1\psi \rangle \\
= \ &\langle A_0\varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, B\psi \rangle \\
= \ &\langle \varphi', \psi \rangle + \varphi(0) \int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da \\
= \ &\psi(1)\varphi(1) - \psi(0)\varphi(0) + \langle \varphi, A_1\psi \rangle + \varphi(0) \int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da.
\end{aligned}$$

よって，$\varphi(0) \left(\int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da - \psi(0) \right) = 0$．$\varphi(0) \neq 0$ だから

$$\psi(0) = \int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da$$

を得る．この様にして，

$$D(A_1) \subseteq \left\{ \psi \in AC[0,1]^+ : \psi(0) = \int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da \right\}$$

が成り立つ．逆に，$\psi \in AC[0,1]^+$, $\psi(0) = \int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da$ とする．

$$\begin{aligned}
A\psi &= A_0^*\psi + B\psi \\
&= A_0^*(\psi - \psi(0)) + A_0^*\psi(0) + B\psi \\
&= A_0^{\odot}(\psi - \psi(0)) + A_0^*\psi(0) + B\psi \\
&= -\psi' - \psi(0)\delta_0 + \left(\int_0^1 \beta(a, \|\psi\|_{L^1})\psi(a)da \right) \delta_0 \\
&= -\psi' \in X^{\odot} = L^1[0,1].
\end{aligned}$$

よって，$\psi \in D(A_1)$．この様にして $(PDE)_3$ に於ける境界条件を発展方程式 $(EE)_2$ に B を摂動すると見做して，$(EE)_3$ を X の中で解き，C-値な解を構成する．これにより $(PDE)_3$ を作用素論的に解いた事になる．

最後に，$(PDE)_4$ を解くことを考える．外力項を加える為に，$F: C \to X$ を

$$F\psi = -d(a, \|\psi\|_{L^1})\psi, \quad \psi \in C$$

として定義する．このとき $(PDE)_4$ は X で発展方程式 $(EE)_3$ に摂動 F を加えた $(EE)_4$ と見做すことが出来る．これにより，$(EE)_4$ の C-値，つまり $L^1_+[0,1]$-値な解を構成する事により $(PDE)_4$ を解いた事になる．

以上を纏めると，$(EE)_4$ は次の弱解 (mild solution) を持つことが分る：
任意の $x \in C$ に対して，

$$\begin{aligned}
S(t)x &= T_0^{\odot}(t)x \ + \ (G) - \int_0^t T_0^{\odot\odot*}(t-s)(B+F)S(s)x ds \\
&= T(t)x \ + \ (G) - \int_0^t T^{\odot*}(t-s)(B+F)S(s)x \, ds.
\end{aligned}$$

References

[1] Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. J. A. M. Heijimans and H. R. Thieme, Perturbation theory for dual semigroups I, Math. Ann. **277**(1987), 709–725.

[2] Ph. Clément, K. Hashimoto, S. Oharu, and B. de Pagter, Nonlinear perturbations of dual semigroups, in preparation.

[3] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957.

[4] T. Iwamiya, Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces, Hiroshima Math. J. **16**(1986), 499–530.

[5] K. Kobayasi, Y. Kobayashi and S. Oharu, Nonlinear evolution operators in Banach spaces, Osaka J. Math. **21**(1984), 281–310.

[6] H. Kawahara, S. Oharu and D. Trigiante, Semilinear evolution equations in sun-reflexive Banach spaces, in preparation.

[7] V. Lakshmikantham and S. Leela, Differential and integral inequalities, Vol.I, Academic Press, New York, 1969.

[8] R. H. Martin, Jr., S. Oharu and T. Takahashi, Characterization of nonlinearly perturbed analytic semigroups in Banach spaces, preprint.

[9] S. Oharu and T. Takahashi, Characterzation of nonlinear semigroups associated with semilinear evolution equations, Trans. Amer. Math. Soc. **311**(1989), 593–619.

[10] B. de Pagter, A characterization of sun-reflexivity, Math. Ann. **283**(1989), 511–518.

[11] N. Pavel, Differential equations, flow invariance and applications, Pitman, London, 1984.

[12] R. S. Phillips, The adjoint semi-group, Pacific J. Math. **5**(1955), 269–283.